Ministère de l'Eseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie
Université Tunis
Ecole Normale Supérieure

Session 2008
du
Concours d'Entrée à l'Ecole Normale Supérieure
Filière MP

Première épreuve de mathématiques
Durée: 4 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constituront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel éléctronique est strictement interdit.

L'objectif du problème est d'établir le théorème de Weiertrass concernant l'approximation uniforme des fonctions continues par des polynômes et d'en donner quelques applications. A cet égard, on a besoin de rappeler certaines notions et d'introduire quelques notations.

On note $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$. En outre, $\mathbb{Z}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ à coeffients dans $\mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leq n\}$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $C([a,b], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme définie par

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\} \quad \text{pour } f \in C([a,b], \mathbb{R}).$$

L'adhérence d'une partie A de $C([a,b], \mathbb{R})$ est notée $\overline{A}$. Tout au long du problème, on confond toute fonction polynomiale de $C([a,b], \mathbb{R})$ avec le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui la représente. De ce fait, $\mathbb{R}[X]$ est identifié au sous-ensemble de $C([a,b], \mathbb{R})$ des fonctions polynomiales. De même, $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ sont considérés comme des parties de $C([a,b], \mathbb{R})$.

I/ Théorème de Weiertrass

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, on considère le polynôme

$$B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $F(x,y) = (x+y)^n$. Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)$.

2. Calculer les polynômes

$$\sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}(x) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) B_{n,k}(x).$$

3. Etablir

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Dans la suite, on fixe $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ et on définit $B_n(f) \in \mathbb{R}[X]$ en posant

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x).$$

Soit $\varepsilon \in]0,+\infty[$.

4. Justifier l'existence de $\alpha \in]0,+\infty[$ tel que

$$(x,y \in [0,1] \text{ et } |x-y| < \alpha) \implies (|f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

5. Vérifier que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x).$$

On pose à présent

$$I = \left\{k \in \{0,1,...,n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha\right\} \quad \text{et} \quad J = \left\{k \in \{0,1,...,n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \alpha\right\}.$$

6. Montrer que si $x \in [0,1]$ alors

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in J} B_{n,k}(x).$$

7. Prouver en utilisant **3.** que

$$\sum_{k \in J} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4\alpha^2 n} \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

8. En déduire que la suite $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

9. Vérifier que l'application $\gamma : [0,1] \to [a,b]$ définie par $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ pour tout $t \in [0,1]$ est bijective et déterminer sa réciproque.

10. En déduire le théorème de Weiertrass, à savoir, toute fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynomiales. Autrement dit, $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $C([a,b])$.

II Théorème de Chodnovsky

Dans cette partie, on suppose que $0 < a < b < 1$. L'objectif est de prouver que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans $C([a,b])$, un résultat dû à Chodnovsky.

Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit $f_c \in C([a,b],\mathbb{R})$ par $f_c(x) = c$ pour tout $x \in [a,b]$. Dans la suite, on se donne $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon \in]0,+\infty[$.

1. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$,

$$0 \leq \frac{1}{2 - x^k} - \frac{1}{2} \leq \varepsilon.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Prouver qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que si $x \in [a,b]$ alors

$$\left| \frac{1}{2-x^k} - \sum_{n=0}^{m} \left(x^k - 1\right)^n \right| \leq \varepsilon.$$

3. En déduire que $f_{1/2} \in \overline{\mathbb{Z}[X]}$.

4. Prouver que si $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$ alors $f_{n/2^m} \in \overline{\mathbb{Z}[X]}$.

5. Montrer que l'ensemble $\{n/2^m : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

6. En déduire que $f_c \in \overline{\mathbb{Z}[X]}$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.

7. Justifier l'existence de $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$.

8. En déduire que $\overline{\mathbb{Z}[X]} = C([a,b])$.

III/ Théorème de Kantorovich

Dans cette partie, on se propose de montrer que, dans $C([0,1])$, on a

$$\overline{\mathbb{Z}[X]} = \{f \in C([0,1]) : f(0), f(1) \in \mathbb{Z}\}.$$

Ce résultat est l'œuvre de Kantorovich.

1. Montrer que si $f \in \overline{\mathbb{Z}[X]}$ alors $f(0), f(1) \in \mathbb{Z}$.

Dans tout ce qui suit, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C([0,1])$ avec $f(0) = f(1) = 0$.

2. Montrer que si $r \in [0, +\infty[$ alors $\{P \in \mathbb{R}_n[X] : \|P\|_\infty \leq r\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Prouver que l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P) = \|P - f\|_\infty$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est continue.

4. Vérifier que $\lim\limits_{\|P\|_\infty \to \infty} \varphi(P) = \infty$.

5. En déduire qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|P_n - f\|_\infty \leq \|P - f\|_\infty$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

On pose désormais

$$Q_n(x) = P_n(x) - xP_n(1) + (x-1)P_n(0).$$

6. Montrer que $\|Q_n - f\|_\infty \leq 2\|P_n - f\|_\infty$.

7. Prouver que la famille $\left(x^k(1-x)^{n-k}\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. Etablir l'existence $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^k (1-x)^{n-k}.$$

9. On note $\mathrm{E}(c)$ la partie entière d'un nombre réel c. En déduire que si

$$R_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{E}(a_k)\, x^k (1-x)^{n-k}$$

alors $\|R_n - Q_n\|_\infty \leq 1/n$.

10. Montrer que

$$\|f - R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} + 2\|P - f\|_\infty \quad \text{pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X].$$

11. Conclure.

IV Injectivité de la transformation de Laplace

L'objectif de cette partie est de montrer ce qu'on a l'habitude d'appeler l'injectivité de la transformation de Laplace.

1. Soient $\omega \in [0, +\infty[$ et f une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ continue et intégrable. Montrer que la fonction g de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\omega x} f(x)$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Pour toute fonction f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ continue et intégrable, on note $\mathfrak{L}(f)$ la fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\mathfrak{L}(f)(\omega) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tout } \omega \in [0, +\infty[.$$

Dans la suite, on se donne une fonction f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ continue et intégrable. De plus, on note F la fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

2. Justitifer l'existence de $\mathfrak{L}(F)(\omega)$ pour tout $\omega \in]0, +\infty[$.

3. Etablir

$$\mathfrak{L}(f)(\omega) = \omega \mathfrak{L}(F)(w) \quad \text{pour tout } \omega \in]0, +\infty[.$$

4. Montrer que si n est un entier naturel alors

$$\mathfrak{L}(F)(n+1) = \int_0^1 t^n F(-\mathrm{Log}t)\,\mathrm{d}t.$$

On suppose désormais que $\mathfrak{L}(f) = 0$ et on note G la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$G(x) = \begin{cases} xF(-\mathrm{Log}x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

5. Vérifier que

$$\int_0^1 t^n G(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

6. En déduire que.

$$\int_0^1 P(t)\,G(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{pour tout } P \in \mathbb{R}[X].$$

7. Montrer que $G(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

8. En déduire que f est nulle.

Ministère de l'Eseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie
Université Tunis
Ecole Normale Supérieure

Session 2008
du
Concours d'Entrée à l'Ecole Normale Supérieure
Filière MP

Deuxième épreuve de mathématiques

Durée: 4 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constituront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel éléctronique est strictement interdit.

Comme de coutume, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Soient $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre d'élément neutre e et $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{A}$. On note u^{-1} l'inverse d'un élément $u \in \mathcal{A}^*$. En particulier, $u^{-1}u = uu^{-1} = e$ pour tout $u \in \mathcal{A}^*$. On dit que $\mathcal{A}$ est **spectralement bornée** si, pour tout $u \in \mathcal{A}$, l'ensemble

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda e - u \notin \mathcal{A}^*\}.$$

est une partie bornée de $\mathbb{K}$. Pour un entier naturel non nul n, on désigne par $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. En outre, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $C(I, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On rappelle qu'on définit une multiplication sur $C(I, \mathbb{R})$ en posant

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x) \quad \text{pour tous } f, g \in C(I, \mathbb{R}) \text{ et } x \in I.$$

Muni de cette multiplication, $C(I, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

On rappelle qu'une application φ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire** sur $\mathcal{A}$ si, pour tous $u, v \in \mathcal{A}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\varphi(\alpha u + v) = \alpha\varphi(u) + \varphi(v).$$

Une forme linéaire φ sur $\mathcal{A}$ est dite **non nulle** s'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $\varphi(u) \neq 0$. Par ailleurs, une forme linéaire sur $\mathcal{A}$ est dite de **Jordan** si

$$\varphi(u^2) = (\varphi(u))^2 \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{A}.$$

Le problème comporte quatre parties. Les toutes premières propriétés des formes linéaires de Jordan sont rassemblées dans la première partie. Ces propriétés sont utiles dans les reste du problème. La deuxième partie est consacrée au théorème de Roitman et Sternfeld caractérisant les formes linéaires de Jordan sur une $\mathbb{C}$-algèbre spectralement bornée. Dans la troisième partie, on caractérise les formes linéaires de Jordan sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On s'interesse dans la dernière partie aux formes linéaires de Jordan sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ pour $n \geq 2$. Enfin, on signale que les trois dernières parties sont **indépendantes**.

I/ Premières propriétés des formes linéaires de Jordan

Soit φ une forme linéaire de Jordan non nulle sur $\mathcal{A}$.

1. Montrer que si $u, v \in \mathcal{A}$ alors $\varphi(uv + vu) = 2\varphi(u)\varphi(v)$.
2. En déduire que $\varphi(e) = 1$ et calculer $\varphi(\varphi(u)e - u)$ pour $u \in \mathcal{A}$.
3. Prouver que si $u, v \in \mathcal{A}$ alors $(\varphi(uv - vu))^2 + (2\varphi(u)\varphi(v))^2 = 4\varphi(u)\varphi(vuv)$.
4. Soit $w, v \in \mathcal{A}$. En remplaçant u par $\varphi(w)e - w$ dans la formule établie dans la question précédente, montrer que $\varphi(vw) = \varphi(v)\varphi(w)$.
5. En déduire que si $u \in \mathcal{A}^*$ alors $\varphi(u) \neq 0$.
6. Prouver que $\varphi(u) \in \mathrm{Sp}(u)$ pour tout $u \in \mathcal{A}$.

II/ Théorème de Roitman-Sternfeld

Dans cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $\mathcal{A}$ est **spectralement bornée**. L'objectif est de prouver que si φ est une forme linéaire sur $\mathcal{A}$ vérifiant $\varphi(u) \in \mathrm{Sp}(u)$ pour tout $u \in \mathcal{A}$ alors φ est de Jordan. Ce résultat est l'œuvre de Roitman et Sternfeld.

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{A}$ telle que $\varphi(u) \in \mathrm{Sp}(u)$ pour tout $u \in \mathcal{A}$.

1. Etablir $\varphi(e) = 1$.

Soit $w \in \mathcal{A}$ tel que $\varphi(w) = 0$. On se donne un entier naturel non nul n et on note p la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$p(\lambda) = \varphi((\lambda e - w)^n) \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

2. Vérifier que p est polynomiale de degré n.

On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les zéros de p comptés avec leurs ordres de multiplicictés.

3. Calculer $\varphi((\lambda_i e - w)^n)$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.
4. En déduire que si $i \in \{1, ..., n\}$ alors $(\lambda_i e - w)^n \notin \mathcal{A}^*$.
5. Prouver que $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(w)$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.
6. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \mathrm{C}_n^2 \varphi(w^2).$$

7. En déduire que

$$0 \leq n(n-1)\left|\varphi(w^2)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.$$

8. Conclure que $\varphi(w^2) = 0$.
9. En déduire que si $u \in \mathcal{A}$ alors $\varphi\left((\varphi(u)e - u)^2\right) = 0$.
10. Conclure que φ est de Jordan.

Dans le reste de cette partie, on se propose d'examiner, sur un exemple, la validité du théorème de Roitman-Sternfeld dans le cas réel.

11. Vérifier que $C([0,1],\mathbb{R})$ est spectralement bornée.

On considère la forme linéaire non nulle ψ sur $C([0,1],\mathbb{R})$ définie par

$$\psi(f)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pour tout } f\in C([0,1],\mathbb{R}).$$

12. Prouver que $\psi(f)\in \mathrm{Sp}(f)$ pour tout $f\in C([0,1],\mathbb{R})$.

13. Est-ce que ψ est de Jordan? Commenter.

III/ Formes linéaires de Jordan sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Le but de cette partie est de caractériser les formes linéaires de Jordan non nulles sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note id l'application identité de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, $\mathrm{id}(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. De plus, on note e la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $e(x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Soit φ une forme linéaire sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\mathrm{Sp}(\mathrm{id})$ et en déduire que $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas spectralement bornée.

2. Montrer que s'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi(f)=f(c)$ pour tout $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors φ est non nulle et de Jordan.

Réciproquement, on suppose que φ est une forme linéaire de Jordan non nulle sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on pose $c=\varphi(\mathrm{id})$. On se propose de montrer, par l'absurde, que $\varphi(f)=0$ pour tout $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $f(c)=0$. Sinon, il existe $g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $g(c)=0$ et $\varphi(g)\neq 0$. On définit alors $u\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en posant

$$u(x)=\frac{2g(x)}{\varphi(g)} \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

3. Calculer $\varphi(u)$ et $u(c)$.

4. Vérifier qu'il existe $\delta\in]0,+\infty[$ tel que

$$]c-\delta,c+\delta[\subset\{x\in\mathbb{R}:-1<u(x)<1\}$$

Dans la suite, on note χ_I la fonction indicatrice d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, $\chi_I(x)=1$ si $x\in I$ et $\chi_I(x)=0$ si $x\notin I$. De plus, on définit $v,w\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en posant, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$v(x)=-\chi_{]-\infty,-1]}(x)+x\chi_{]-1,1[}(x)+\chi_{]1,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad w(x)=u(x)-v(u(x)).$$

5. Prouver que $w(x)=0$ pour tout $x\in]c-\delta,c+\delta[$.

6. Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h(x)=\frac{w(x)}{x-c} \text{ si } x\notin]c-\delta,c+\delta[\quad \text{et} \quad h(x)=0 \text{ si } x\in]c-\delta,c+\delta[.$$

Montrer que $h\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

7. Prouver que $w=(\mathrm{id}-ce)\,h$ et en déduire $\varphi(w)$.

8. Calculer $\varphi(v\circ u)$.

9. Montrer que $v - 2e \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})^*$.

10. Aboutir à une contradiction.

11. Conclure que $\varphi(f) = f(c)$ pour tout $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

IV/ Formes linéaires de Jordan sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$

Soit n un entier naturel vérifiant $n \geq 2$. On note $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. Autrement dit, si $i, j \in \{1, ..., n\}$ alors $E_{ij} = (e_{k\ell})_{1 \leq k,\ell \leq n}$ avec

$$e_{k\ell} = 1 \text{ si } (k, \ell) = (i, j) \quad \text{et} \quad e_{k\ell} = 0 \text{ si } (k, \ell) \neq (i, j).$$

Le rang d'une matrice $M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ est noté $\mathrm{rg}(M)$ et sa trace est notée $\mathrm{tr}(M)$.

L'objectif principal de cette partie est de montrer, par deux méthodes différentes, que l'unique forme linéaire de Jordan sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ est la forme linéaire nulle.

A/ Première méthode

Soit $r \in \{1, ..., n\}$.

1. Justifier le fait que $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ est spectralement bornée.

2. Prouver l'exsitence de $F_{11}, G_{11} \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ tels que

$$E_{11} = F_{11} + G_{11} \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(F_{11}) = \mathrm{rg}(G_{11}) = r.$$

3. En déduire que si $i, j \in \{1, ..., n\}$ alors il existe $F_{ij}, G_{ij} \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ tels que

$$E_{ij} = F_{ij} + G_{ij} \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(F_{ij}) = \mathrm{rg}(G_{ij}) = r.$$

4. Montrer qu'il existe une base $(B_i)_{1 \leq i \leq n^2}$ de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(B_i) = r$ pour tout $i \in \{1, ..., n^2\}$.

5. Justifier l'existence d'une base de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ formée de matrices inversibles.

6. Prouver que si φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ alors il existe $R \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ tel que $R \neq 0$ et $\varphi(R) = 0$.

7. En déduire que si φ est une forme linéaire de Jordan sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ alors φ est nulle.

B/ Deuxième méthode

1. Montrer que si $i, j \in \{1, ..., n\}$ alors $E_{ii}E_{ij} = E_{ij}$ et $E_{ij}E_{ji} = E_{ii}$.

2. Prouver que si $i, j \in \{1, ..., n\}$ et $i \neq j$ alors $E_{ij}E_{ii} = 0$.

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ telle que

$$\varphi(MN) = \varphi(NM) \quad \text{pour tous } M, N \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}).$$

3. Vérifier que, pour $i, j \in \{1, ..., n\}$,

$$\varphi(E_{ij}) = 0 \text{ si } i \neq j \quad \text{et} \quad \varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj}).$$

4. En déduire l'existence de $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que

$$\varphi(M) = \alpha \mathrm{tr}(M) \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}).$$

5. Retrouver le fait que la forme linéaire nulle est la seule forme linéaire de Jordan sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.

UNIVERSITE DE TUNIS
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure MP - PC
Session de Juillet 2008

Epreuve de Physique
Durée : 4h Coef. : 5

Le sujet comporte 6 pages. Il sera largement tenu compte de la présentation, de la rédaction et du soin apporté à la copie. L'usage de la calculatrice est autorisé. Tout document est interdit.
Les parties I et II sont indépendantes.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'espace est rapporté à un système d'axes orthonormé direct $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy},\overrightarrow{Oz})$ de base $(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$.

Un milieu métallique, de permittivité électrique ε_0 et de perméabilité magnétique μ_0 identiques à celles du vide, occupe le demi espace $z \geq 0$. Le demi espace $z < 0$ étant vide. On envoie sur la surface Σ du métal une onde électromagnétique, monochromatique de pulsation ω, polarisée rectilignement le long de $\overrightarrow{Ox}$. Le champ électrique de cette onde s'écrit, en notation complexe, en tout point M(x, y, z) du vide sous la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E_i}}(M,t) = E_0 \exp i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)\,\overrightarrow{e_x}$$

Où E_0 est une constante positive, $\vec{k}$ est le vecteur d'onde.

I. Pression de radiation

L'onde de champ électrique $\underline{\overrightarrow{E_i}}(M,t)$ se propage dans le demi espace $z < 0$ selon la direction $\overrightarrow{z'z}$ (Figure 1).

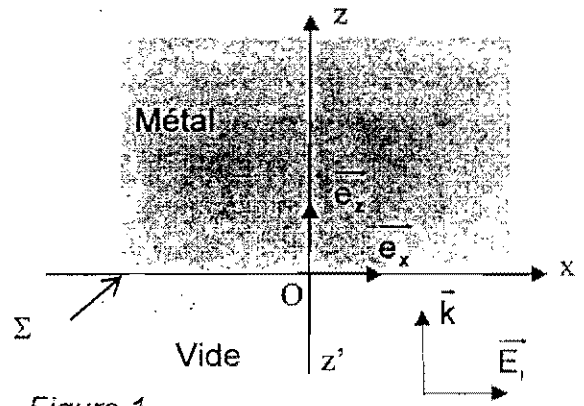


Figure 1

1. Ecrire, en fonction de ω, c (vitesse de la lumière dans le vide) et $\vec{e}_z$ le vecteur d'onde $\vec{k}$. Trouver le champ magnétique $\overrightarrow{B_i}(M,t)$ de l'onde incidente. Décrire qualitativement ce qui se passe lorsque l'onde, dont la fréquence est supposée dans le domaine hertzien, interagit avec le milieu métallique.

2. Les champs électrique et magnétique en un point M intérieur au métal ($z \geq 0$) sont de la forme :

$$\overrightarrow{E_m}(M,t) = E_m(z,t)\overrightarrow{e_x} = E_{0m}(z)\cos(k_m z - \omega t)\overrightarrow{e_x} \text{ et } \overrightarrow{B_m}(M,t) = B_m(z,t)\,\overrightarrow{e_y}.$$

Où k_m est le nombre d'onde dans le métal. $E_m(z,t)$ et $B_m(z,t)$ tendent vers zéro, pour les fréquences considérées, quand z tend vers l'infinie.

2.1. Rappeler les équations de Maxwell dans le métal.

2.2. Déterminer, en tout point M du métal, les expressions des densités volumiques de charges $\rho(M,t)$ et de courants de conduction $\vec{j}(M,t)$ engendrées par l'onde. On exprimera $\vec{j}(M,t)$ en fonction de $\frac{\partial E_m(z,t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial B_m(z,t)}{\partial z}$.

3. Soit $d\tau = dx\,dy\,dz$ un élément de volume autour d'un point M intérieur au métal.

3.1. Ecrire la force $d^3\vec{F}(M,t)$ exercée par l'onde sur les charges et les courants contenus dans $d\tau$. En déduire que la densité volumique de force $\vec{f}(M,t)$ exercée par l'onde sur le métal est donnée par :

$$\vec{f}(M,t) = \frac{d^3\vec{F}}{d\tau} = -\frac{B_m}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_m(z,t)}{\partial z} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_m(z,t)}{\partial t}\right)\overrightarrow{e_z}$$

3.2. On définit la valeur moyenne temporelle d'une fonction $\vec{f}(\vec{r},t)$ par :

$$\langle\vec{f}(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\vec{f}(\vec{r},t')dt'$$

Où T est la période temporelle de la fonction considérée $\vec{f}(\vec{r},t)$.

a) Déterminer $B_m(z,t)$ en fonction de $E_{0m}(z)$, $\frac{dE_{0m}(z)}{dz}$, ω et le nombre d'onde k_m dans le métal.

b) Montrer que la valeur moyenne dans le temps de $\frac{\partial(E_m B_m)}{\partial t}$ est nulle :

$\langle\frac{\partial(E_m B_m)}{\partial t}\rangle = 0$. En déduire que $\langle B_m\frac{\partial E_m}{\partial t}\rangle = \langle E_m\frac{\partial E_m}{\partial z}\rangle$.

c) Montrer que la valeur moyenne temporelle de la densité volumique de force $\vec{f}(\vec{r},t)$ s'écrit dans ce cas :

$$\langle\vec{f}(z,t)\rangle = -\overrightarrow{e_z}\,\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\left(\frac{1}{\mu_0}B_m(z,t')\frac{\partial B_m(z,t')}{\partial z} + \varepsilon_0 E_m(z,t')\frac{\partial E_m(z,t')}{\partial z}\right)dt'$$

d) On considère, dans le métal, l'élément de volume de dimensions (ℓ_x,ℓ_y,ℓ_z=dz) suivant les directions $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$ et $\overrightarrow{Oz}$ (Figure2). Trouver la valeur moyenne temporelle, notée $\langle d\vec{F}\rangle$, de la force $d\vec{F}$ s'exerçant sur cet élément de volume. Montrer que la force totale, moyenne dans le temps, qu'exerce l'onde sur une portion rectangulaire de dimension (ℓ_x,ℓ_y) de la surface Σ du métal est donnée par :

$$\langle\overrightarrow{F_R}\rangle = \ell_x\ell_y\,\langle u(0,t)\rangle\,\overrightarrow{e_z}$$

où $\langle u(0,t)\rangle$ est la valeur moyenne dans le temps de la densité d'énergie électromagnétique calculée au niveau de la surface Σ du métal.

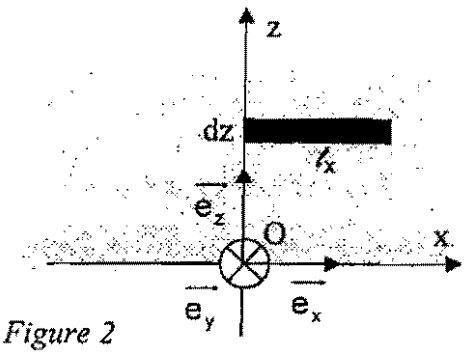


Figure 2

En déduire qu'il existe une pression $\langle \pi_R \rangle$ exercée par l'onde sur le métal, dont-on donnera l'expression en fonction des champs $E_m(0,t)$ et $B_m(0,t)$. Les quantités $\langle \overrightarrow{F_R} \rangle$ et $\langle \pi_R \rangle$ seront respectivement appelées force de radiation et pression de radiation.

4. On se place dans le cas où le métal est un conducteur parfait.

4.1. Trouver la puissance moyenne dans le temps $\langle P \rangle$, apportée par l'onde électromagnétique incidente (de champ électrique $\overrightarrow{E_i}(M,t)$) à la surface Σ du métal parfait.

4.2. Que valent dans ce cas les champs électrique $\overrightarrow{E_m}(M,t)$ et magnétique $\overrightarrow{B_m}(M,t)$ au point M intérieur au conducteur parfait ? Justifier vos résultats.

4.3. Déterminer dans ce cas les champs électrique $\overrightarrow{E_r}(M,t)$ et magnétique $\overrightarrow{B_r}(M,t)$ de l'onde électromagnétique réfléchie par le conducteur parfait.

4.4. En déduire les champs $\overrightarrow{E}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$ de l'onde résultante dans le demi espace $z < 0$. Donner la nature de cette onde et calculer la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$ du vecteur de Poynting $\vec{R}$ de l'onde résultante. Conclure.

4.5. Montrer, dans ce cas, que les expressions de la force de radiation $\langle \overrightarrow{F_R} \rangle$ et de la pression de radiation $\langle \pi_R \rangle$ sont :

$$\langle \overrightarrow{F_R} \rangle = \frac{2\langle P \rangle}{c} \overrightarrow{e_z} \qquad (2) \quad \text{et} \quad \langle \pi_R \rangle = 2\langle u_i \rangle \qquad (3)$$

où u_i est la densité d'énergie de l'onde incidente.

On admettra dans la suite du problème que ces expressions restent valables pour toutes les fréquences ν de l'onde incidente et s'étendent au cas d'une onde d'extension transverse finie, comme celle émise par un laser.

5. L'onde incidente est un faisceau de lumière traité comme un faisceau de photons, se déplaçant évidement à la vitesse c, parallèlement à l'axe $\overrightarrow{Oz}$.

5.1. Rappeler les expressions de l'énergie $\mathcal{E}$ et de la quantité du mouvement $\vec{p}$ d'un photon de ce faisceau. On notera *h* la constante de Planck.

5.2. Quelle densité particulaire N de photons peut-on attribuer à l'onde incidente ? Exprimer N en fonction de la fréquence ν et de $\langle u_i \rangle$, valeur moyenne dans le temps de la densité d'énergie électromagnétique de l'onde incidente.

5.3. Les photons incidents viennent se réfléchir, sans perte d'énergie, sur la surface Σ du matériau réfléchissant (conducteur parfait).

a) Trouver la quantité de mouvement transférée par un photon au matériau réfléchissant. En déduire la quantité de mouvement $d\vec{p}$ transférée, durant l'intervalle de temps dt, à une aire S de la surface Σ du matériau réfléchissant.

b) Retrouver la relation $\langle \pi_R \rangle = 2\langle u_i \rangle$.

5.4. L'expression de la valeur moyenne de la pression de radiation dans le cas où l'onde incidente arrive sur le matériau parfaitement réfléchissant sous l'incidence θ est $\langle \pi'_R \rangle = \langle \pi_R \rangle \cos^2 \theta$. Justifier cette expression.

6. Applications

6.1. *Application 1 :* Pression exercée par un faisceau laser.

a) Quelle est la force de radiation exercée par un faisceau laser de puissance moyenne $\langle P \rangle = 1W$ sur un miroir métallique parfait ?

b) Le miroir de masse m est suspendu à un fil de longueur ℓ dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\,\vec{e_x}$ (Figure 3).

Calculer le recul δz du miroir sous l'effet du faisceau laser de puissance $\langle P \rangle$.

Application numérique :

$\langle P \rangle = 1W$, $\ell = 2m$, $m = 10^{-2}$ kg et $g = 10\ ms^{-2}$.

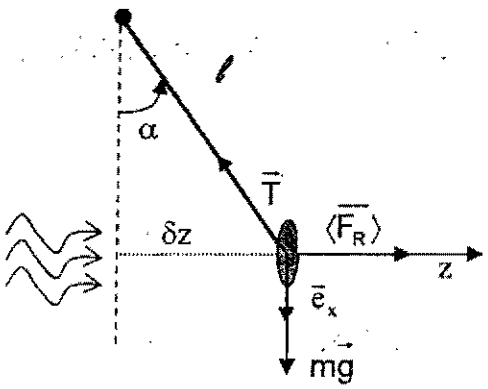


Figure 3

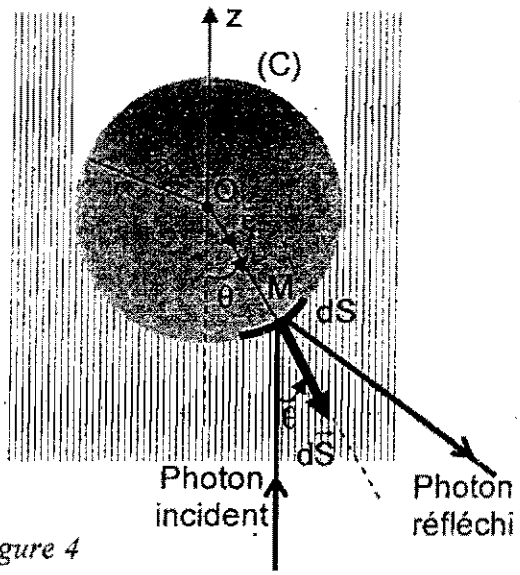


Figure 4

6.2. *Application 2 :* Orientation de la queue des comètes.

a) On s'intéresse à la force subie par un corps (C) parfaitement réfléchissant, sphérique de rayon a, placé dans un faisceau lumineux parallèle, cylindrique, de rayon supérieur à a (figure 4).

- En tenant compte du résultat de la question 5.4., écrire la force moyenne de radiation $\langle d\vec{F_R} \rangle$ s'exerçant sur l'élément de surface dS du corps sphérique (C).
- En déduire la force moyenne de radiation totale $\langle \vec{F_R} \rangle = \langle F_R \rangle \vec{e_z}$ subie par le corps (C). On l'exprimera en fonction de la pression moyenne de radiation $\langle \pi_R \rangle$ et de a.

b) Le corps, de masse volumique μ, est situé dans le vide interplanétaire à la distance r du soleil. L'émission solaire est supposée isotrope, de puissance totale moyenne $\langle P_S \rangle = 4\,10^6 W$. L'onde arrivant du soleil sur le corps (C) est assimilée à une onde plane.

- Rappeler pour une onde plane, la relation entre le vecteur de Poynting moyen $\langle \vec{R} \rangle$ et la densité d'énergie moyenne $\langle u \rangle$.
- Trouver, en fonction de $\langle P_S \rangle$, c et r, la pression de radiation moyenne $\langle \pi_R \rangle$ que subit le corps (C) de la part du soleil.

- Evaluer le rapport η entre la force de radiation due au rayonnement solaire et la force gravitationnelle exercée par le soleil sur cet objet (C) dans les deux cas suivants :
  - Cas d'une météorite : $\mu = 3.0\ 10^3$ kg.m^{-3} et a = 1m.
  - Cas d'une poussière interstellaire : $\mu = 1.0\ 10^3$ kg.m^{-3} et a=1µm.

  On donne la constante de gravitation universelle G= 6,67 10^{-11} kg^{-1} m^{3}s^{-2} et la masse du soleil $M_S = 2.0\ 10^{30}$ kg.

c) Cette étude permet-elle d'expliquer pourquoi le nuage gazeux (Figure 5), appelé queue, qui accompagne une comète est derrière elle quand celle-ci s'approche du soleil et devant lorsqu'elle s'en éloigne ?

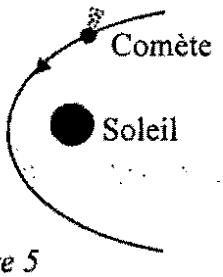


Figure 5

II. Réflexion d'une onde électromagnétique sur une surface ondulée.

Dans cette partie, l'onde incidente de champ électrique $\vec{E_i}$, dont le vecteur d'onde $\vec{k}$ appartient au plan yOz, tombe sur une surface ondulée Σ, parfaitement réfléchissante, sous l'angle d'incidence θ_0 (figure 6).

La surface ondulée est d'équation z = f(y), périodique, de période a, supposée infinie dans les directions x et y, sépare l'espace en deux parties :

La région $z \geq f(y)$ est remplie d'un métal parfaitement conducteur.

La région $z < f(y)$ est le vide.

La période a de la surface métallique n'étant pas nécessairement grande devant la longueur d'onde λ de l'onde incidente, les lois de Descartes pour la réflexion ne sont plus vérifiées. L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie, appelée onde difractée dont le champ électrique $\vec{E_D}$ est lui aussi polarisé rectilignement selon $\vec{e_x}$. On pose :

$\vec{E_D}(M,t) = F(x,y,z)\exp(-i\omega t)\vec{e_x}$

On appelle $\vec{E_T} = \vec{E_i} + \vec{E_D}$ le champ électrique total régnant au dessus de la surface réfléchissante (dans le vide).

1. Montrer que F(x, y, z) ne dépend pas de x.
2. Ecrire l'équation de propagation de $\vec{E_D}(y,z,t)$ dans le vide. En déduire l'équation aux dérivées partielles que vérifie la fonction F(y,z).
3. Ecrire les conditions aux limites sur le champ électrique $\vec{E_T}$ au points M(x, y, f(y)) et M'(x, y+a, f(y)) de la surface Σ. En déduire une relation entre F(y+a,f(y)), F(y,f(y)), k, θ_0 et a.

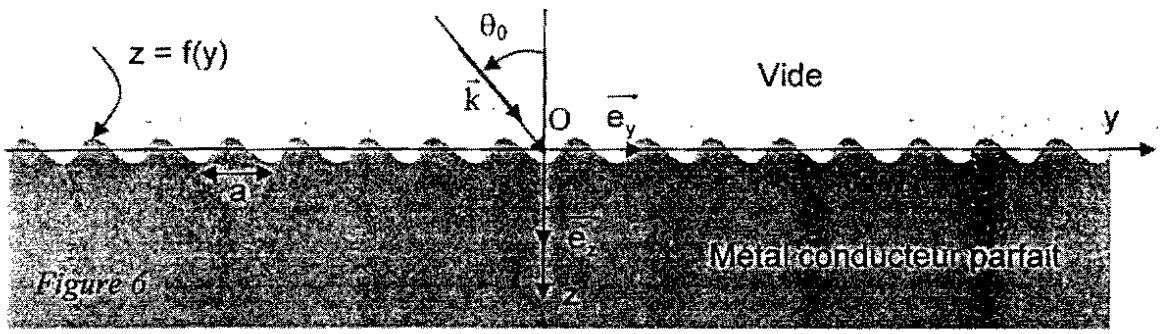


Figure 6

4. On cherche une solution de la forme $F(y,z) = A\exp i(\alpha y + \beta z)$, les coefficients A, α et β sont des constantes réelles ou complexes.

4.1. En utilisant l'équation aux dérivées partielles de la question 2, montrer que α et β sont reliées au nombre d'onde k dans le vide par une relation à établir.

4.2. En exploitant le résultat de la question 3, déterminer α en fonction de θ_0, k, a et d'un nombre entier n. On posera $K = \frac{2\pi}{a}$.

4.3. Avant de continuer à chercher si cette solution convient, on se propose d'étudier plus en détail l'onde ainsi obtenue. On suppose ici que α et β sont réels.

a) Montrer que si a est suffisamment grand, α ne vérifie l'inégalité, $-k \le \alpha \le k$, que s'il existe deux entiers N_1 et N_2, positifs ou nuls, tel que $-N_1 \le n \le N_2$. On donnera N_1 et N_2 en fonction de a, λ et θ_0.

En posant $\alpha = k\sin\theta$, donner $\sin\theta$ en fonction de a, λ, θ_0 et du nombre entier n.

b) Calculer N_1 et N_2 pour a = 2 µm, λ = 0.55 µm et θ_0 = 30°.

c) Déterminer alors β en fonction de k et θ et caractériser l'onde ainsi obtenue.

4.4. On se place dans le cas $n < -N_1$ ou $n > N_2$.

a) Montrer que $\alpha^2 > k^2$. En déduire que $\beta = -i\beta'$ où β' est une constante réelle positive.

b) Caractériser l'onde de champ électrique $\overrightarrow{E_D}$, obtenue. Que devient cette onde dès qu'on s'écarte de la surface métallique ? Préciser ce résultat en calculant numériquement β' et $\delta = \frac{1}{\beta'}$ avec les valeurs numériques de la question précédente, en prenant par exemple $n = N_2+1$.

5. On s'intéresse ici à la forme générale du champ électrique $\vec{E}_D$ de l'onde diffractée.

5.1. Montrer en fait que la fonction F(y,z), proposée précédemment ne convient pas. Pour cela, on montrera que les conditions aux limites sur $\overrightarrow{E_T}$ au point M(x,y,f(y)) ne peuvent pas être satisfaites quel que soit y, sauf pour $\theta = \theta_0$.

5.2. La solution, que nous n'étudierons pas ici, s'écrit en fait sous la forme d'une somme de solutions précédentes, pour toutes les valeurs de l'entier n introduit précédemment :

$$F(y,z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \exp i(\alpha_n y + \beta_n z)$$

a) Commenter et donner α_n et β_n en fonction d'un angle θ_n dont on exprimera le sinus en fonction de θ_0, λ, a et du nombre entier n.

b) L'onde incidente est polychromatique. Quel phénomène physique aura-t-il lieu au niveau de l'interface ondulée Σ.

Ecole Normale Supérieure de Tunis
Année Universitaire 2007-2008
Concours d'Entrée à l'Ecole normale Supérieure
Session de Juillet 2008
Epreuve d'Anglais **Durée : 2h** **Section: Mathématiques / Physique**

When Two worlds Collide

In Mark Nunes's new book *Cyberspaces of Everyday's Life*, where he examines the multifarious ways in which people interact with communication technologies, he is unable to include the hyperlinks and search facilities that abound in cyberspace.

Yet the word cyberspace appeared in a book by William Gibson's 1984 novel Neuromancer. Gibson invented the word inspired no doubt by the term cybernetics, coined by American mathematician Norbert Wiener. Gibson also supplied the now-famous definition: "A consensual hallucination experienced daily by billions ... a graphical representation of data abstracted from the banks of every computer in the human system." When the web browsers and search engines came along a decade or so later, the word was there waiting. Shrewdly reworking religious and philosophical conceptions of transcendence, Gibson then set up a vivid contrast between cyberspace and – as he provocatively put it – "metaspace". Disembodied in cyberspace, we are liberated to fly around a virtual world like Superman, while back in the material world all that is left of us is an obsolete bundle of organs.

At the time, many people saw this as a revolutionary promise. Yet the relationships between cyberspace and the surroundings, physical bodies and social practices have turned out to be more complex, subtle and interesting than Gibson had proposed. We are often exposed to multiple streams of data simultaneously, through computer screens, mobile phones, MP3 players and a growing array of other interactive gadgets. As I type this text in one window of my laptop, emails arrive in another. A third window shows live video of Australia playing England at cricket. From time to time, I break away from the screen to pay attention to the demands of children, dogs and bodily functions: the here and now is just another open window.

We live in, a world in which time and space are fragmented and our attention is divided, continually switching back and forth between different streams of sensory inputs. Furthermore, we have the ability to weave these streams together. I glance up from my hard copy of this review to Google a concept the author has introduced. In my car, I experience the urban here and now through the windshield, while my GPS navigation system locates me in a map, and I attempt to mentally coordinate the two.

Mark Nunes attempts to understand the complex ways in which cyberspace and physical space intermingle. He has the inspired idea of putting these 21st –century scenarios in the context of work by the 20th-century French philosopher Henri Lefebvre. This work, in particular his monumental 1974 text *The Production of Space*, has been hugely influential among certain geographers, urban planners and cultural critics. As the title of the book suggests, Lefebvre argued that social space – the social environment in which people interact with and relate to each other – is neither neutral nor static, but it is actively "produced" by our everyday behaviour. Nunes effectively extends Lefebvre's thesis by exploring the way our behaviour defines cyberspace.

As the boundaries between cyberspace and physical reality are getting ever more burred; Nunes looks at a bold attempt to make a sense of it all by providing a very useful antidote to the frothy pop theorising of *Wired* magazine and other such hangovers from the dotcom era.

William J. Mitchell[1], *New Scientist*, December 2007.

Answer the questions in the provided space.

Clear handwriting and clean presentation of your paper are required.

I. COMPREHENSION QUESTIONS

A/ Answer the following questions using complete sentences and your own words.

1. **Explain to what extent Mark Nunes is innovative in his book *Cyberspaces of Everyday Life.***

.....
.....
.....

2. **What two interesting theories is he exploiting to erect his thesis?**

.....
.....
.....
.....

3. **Write a 6 – 8 line summary of this book review article.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

B/ Decide what the underlined words refer to:

1. diverse (adj):.....
2. a reference or navigation element in an electronic document to another section of the same document or to another document that may be on or part of a (different) domain (noun): .....
3. the science of communications and automatic control systems in both machines and living things (noun): .....
4. old-fashioned (adj): .....

[1] William J. Mitchell is a professor of architecture and media arts and sciences at the Massachusetts Institute of Technology. His most recent book is *Placing Words: Symbols, Space and the City* (MIT 2005).

II. LANGUAGE

A / Answer the following questions.

1. **What steps should we follow to form the passive voice?**

.....

.....

2. **These are examples of composed tenses: had been writing, was sleeping, has left ...etc; according to you what distinguishes a composed tense from a simple one.**

.....

.....

B/ Turn the following active sentences to the passive, each time indicate the tense of the active verb.

1. Someone seems to have made a terrible mistake.

Tense of the active verb: .....

.....

2. For months now, burglars have been breaking into the abandoned house.

Tense of the active verb: .....

.....

C/ Make correct conditional sentence out of the following situation and specify the type of conditional you used.

He must have loved his elder son very much because he bequeathed him his entire estate.

If he (not love) .....

Type of conditional used: .....

III. WRITING

Today, some theorists think that space is no longer in geography but it is in electronics. Man's ultra-modern conception of space does no longer depend on the distribution of territory but on the virtual division of time and the hyper-circulation of information. The implications of this are multiple. In a coherent essay, explain and discuss this statement using appropriate examples to defend and illustrate your point of view about the idea of living inside and producing cybernetically- controlled worlds.

Concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure de Tunis

Section : MP – PC .
Session : Juillet 2008 .
Epreuve de langue ; durée : 3 heures

Texte

J'étais obligé de constater aussi que jusqu'ici j'avais eu sur ces questions des idées qui n'étaient pas justes. J'ai cru longtemps -et je ne sais pas pourquoi- que pour aller à la guillotine, il fallait monter sur un échafaud, gravir des marches. Je crois que c'était à cause de la Révolution de 1789, je veux dire à cause de tout ce qu'on m'avait appris ou fait voir sur ces questions. Mais un matin, je me suis souvenu d'une photographie publiée par les journaux à l'occasion d'une exécution retentissante. En réalité, la machine était posée à même le sol, le plus simplement du monde. Elle était beaucoup plus étroite que je ne le pensais. C'était assez drôle que je ne m'en fusse pas avisé plus tôt. Cette machine sur le cliché m'avait frappé par son aspect d'ouvrage de précision, fini et étincelant. On se fait toujours des idées exagérées de ce qu'on ne connaît pas. Je devais constater au contraire que tout était simple : la machine est au même niveau que l'homme qui marche vers elle. Il la rejoint comme on marche à la rencontre d'une personne. Cela aussi est ennuyeux. La montée vers l'échafaud, l'ascension en plein ciel, l'imagination pouvait s'y accrocher. Tandis que, là encore, la mécanique écrasait tout : on était tué discrètement, avec un peu de honte et beaucoup de précision.

Il y avait aussi deux choses à quoi je réfléchissais tout le temps : l'aube et mon pourvoi. Je me raisonnais cependant et j'essayais de n'y plus penser. Je m'étendais, je regardais le ciel, je m'efforçais de m'y intéresser. Il devenait vert, c'est le soir. Je faisais encore un effort pour détourner le cours de mes pensées. J'écoutais mon cœur. Je ne pouvais imaginer que ce bruit qui m'accompagnait depuis si longtemps pût jamais cesser. Je n'ai jamais eu de véritable imagination. J'essayais pourtant de me représenter une certaine seconde où le battement de ce cœur ne se prolongerait plus dans ma tête. Mais en vain. L'aube ou mon pourvoi était là. Je finissais par me dire que le plus raisonnable était de ne plus me contraindre.

A. Camus, *L'Etranger*, éditions Folio, *p. 112*

Questions :

Morpho- syntaxe :

1- Etudiez la ***subordination dans les phrases soulignées*** (nature, moyen de subordination et fonction de la subordonnée). (6pts)

2- Etudiez dans le texte ***quelques usages du présent et des temps du passé***. Essayez de justifier, à partir de 4 ou 5 exemples *significatifs*, la valeur à attribuer à chaque emploi. (5pts)

3- Donnez ***le sens contextuel*** des mots suivants : *retentissant* (l-6) ; *frappé* (l-8) ; *écrasait* (l-13). Employez chacun des mots dans un exemple où il prend un sens différent de celui qu'on trouve dans le texte. (3pts)

4- Relevez les ***verbes qui expriment les sentiments du locuteur*** et donnez votre point de vue sur son état d'esprit au moment de passer sur l'échafaud après sa condamnation à mort. (*Essai rédigé*) (6pts)

Ministère de l'Eseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie
Université Tunis
Ecole Normale Supérieure

Session 2008
du
Concours d'Entrée à l'Ecole Normale Supérieure
Filière PC

Epreuve de mathématiques
Durée: 4 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constituront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel éléctronique est strictement interdit.

Le sujet comporte deux problèmes indépendants. Le premier propose deux méthodes pour calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ et le deuxième fournit une condition nécessaire et suffisante en termes de projecteurs pour qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel réel ou complexe soit diagonalisable.

Premier Problème

Comme il a été déjà signalé, ce problème propose deux méthodes différentes pour calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$$

A/ Première méthode

1. Justifier l'existence de cette intégrale.

On pose, pour $x \in [0, +\infty[$,

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$$

2. Vérifier que g est bien-définie sur $[0, +\infty[$.

3. Montrer que g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2+1} \quad \text{pour tout } x \in]0, +\infty[.$$

4. Prouver que

$$|\sin t| \leq |t| \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

5. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

6. En déduire que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg}(x).$$

7. Montrer que l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞.

8. Montrer que φ' est intégrable sur $]0,+\infty[$.

9. Etablir, pour $x \in]0,+\infty[$,

$$g(0) - g(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \sin\left(\tfrac{t}{x}\right) \mathrm{d}t.$$

10. En déduire que, pour $x \in]0,+\infty[$,

$$g(0) - g(x) = -x \int_0^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\tfrac{t}{x}\right)\right) \varphi'(t)\, \mathrm{d}t.$$

11. Montrer que g est continue en 0.

12. Etablir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

B/ Deuxième méthode

1. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt.$$

2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t.$$

3. Montrer que l'application f de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

4. En intégrant par parties, prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\tfrac{2n+1}{2}t\right) \mathrm{d}t = 0.$$

5. Retrouver la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

Deuxième Problème

On note $\mathbb{K}$ le coprs des nombres réels ou le corps des nombres complexes. La $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$. Pour un entier naturel m, on note $\mathbb{K}_m[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degrés au plus m. De plus, si m est non nul, on note $\mathbb{K}^m$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ (m fois).

Soient n un entier naturel non nul et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. L'endomorphisme identité de E est noté id. L'objectif principal de ce problème est de fournir une condition nécéssaire et suffisante pour qu'un endomorphisme f de E soit diagonalisable et d'en donner quelques propriétés.

Dans tout ce qui suit, f désigne un endomorphisme de E. On pose $f^\circ = \mathrm{id}$ et, si m est un entier naturel non nul, $f^m = f \circ \cdots \circ f$ (m fois). De plus, si

$$Q(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m \in \mathbb{K}[X],$$

on note

$$Q(f) = a_0 \mathrm{id} + a_1 f + \cdots + a_m f^m \in \mathcal{L}(E),$$

où $\mathcal{L}(E)$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors il existe des scalaires deux à deux distincts $\alpha_1, ..., \alpha_k$ et des projecteurs $p_1, ..., p_k$ de E tels que

$$f = \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k, \tag{1}$$

$$\mathrm{id} = p_1 + \cdots + p_k \tag{2}$$

et

$$p_i \circ p_j = 0 \quad \text{pour tout } i, j \in \{1, ..., k\} \text{ avec } i \neq j. \tag{3}$$

Inversement, on considère dans la suite un endomorphisme f de E tel qu'il existe des scalaires deux à deux distincts $\alpha_1, ..., \alpha_k$ et des endomorphismes non nuls $p_1, ..., p_k$ de E vérifiant les trois conditions (1), (2) et (3).

2. Vérifier que p_i est un projecteur de E pour tout $i \in \{1, ..., k\}$.

3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel m,

$$f^m = \alpha_1^m p_1 + \cdots + \alpha_k^m p_k$$

4. En déduire que si $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ alors

$$Q(f) = Q(\alpha_1) p_1 + \cdots + Q(\alpha_k) p_k.$$

5. Prouver que la la famille $(p_1, ..., p_k)$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

6. Vérifier que si $i \in \{1, ..., k\}$ et $x \in \mathrm{Im}(p_i)$ alors $f(x) = \alpha_i x$.

7. En déduire que

$$E = \ker(f - \alpha_1 \mathrm{id}) \oplus \cdots \oplus \ker(f - \alpha_k \mathrm{id}).$$

On pose

$$V_k(\alpha_1, ..., \alpha_k) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{k-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \alpha_k & \alpha_k^2 & \cdots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

et, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$R(x) = V_k(\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}, x)$$

8. Montrer que R est un polynôme et $\deg(R) \leq k-1$.

9. Vérifier que $\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}$ sont des racines de R.

10. En déduire que si $x \in \mathbb{K}$ alors

$$R(x) = V_{k-1}(\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}) \prod_{i<k} (x - \alpha_i).$$

11. Etablir

$$V_k(\alpha_1, ..., \alpha_k) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\alpha_j - \alpha_i).$$

12. En déduire que, pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, il existe $Q_i(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\deg(Q_i(X)) < k \quad \text{et} \quad p_i = Q_i(f).$$

13. Pour $i \in \{1, ..., k\}$ et $x \in \mathrm{Im}(p_i)$, calculer $Q_i(f)(x)$.

14. En déduire que si $i, j \in \{1, ..., n\}$ alors

$$Q_i(\alpha_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Pour $i \in \{1, ..., k\}$ et $x \in \mathbb{K}$, on pose

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{k} \frac{x - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}.$$

15. Calculer $L_i(\alpha_j)$ pour $i, j \in \{1, ..., k\}$.

16. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{K}_{k-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^k$ définie par

$$\varphi(P) = (P(\alpha_1), ..., P(\alpha_k)).$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

17. En déduire que

$$p_i = \prod_{j=1, j \neq i}^{k} \frac{1}{\alpha_i - \alpha_j} (f - \alpha_j \mathrm{id}) \quad \text{pour tout } i \in \{1, ..., k\}$$

Fin de l'épreuve

ECOLE NORMALE SUPERIEURE CONCOURS DE RECRUTEMENT SECTION PC Juillet 2008	
EPREUVE: CHIMIE	**PARTIE B : CHIMIE GENERALE CHIMIE MINERALE**
★★★★★★★★★★★★★★★★ **DUREE : 2 heures** ★★★★★★★★★★★★★★★★	

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la présentation des raisonnements constituera un élément important pour l'appréciation des copies.

.Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

CETTE PARTIE COMPORTE UNE QUESTION DE COURS ET QUATRE EXERCICES ET DOIT ETRE

REDIGEE SUR COPIES SEPAREES.

I. Exercice 1 :Cristallographie

L'argent possède une structure cubique à faces centrées.

a. Représenter une maille de l'argent. Quelle est la coordinence d'un atome dans cette structure ?

b. Le rayon atomique de l'argent est de 144pm. En déduire le paramètre de maille de l'argent.

c. Quelle est la compacité d'une telle structure ?

d. Calculer la masse volumique de l'argent.

e. Quels types de sites interstitiels présentent cette structure ? Préciser, pour chaque type, la position et le nombre de sites.

f. Calculer la taille d'un site octaédrique.

g. Du point de vue de la structure cristallographique, quels sont les deux principaux types d'alliages métalliques ?

f. Connaissant la valeur du rayon atomique de l'Or (R_{Au} = 147pm), quel(s) type(s) d'alliages Ag-Au peut-on envisager ?

Données : Masse molaire de l'argent : $M_{Ag=}$ = 107,9 g.mol^{-1}.

Constante d'Avogadro : N_A = 6,022 10^{23}

Exercice 2 : Atomistique - liaisons chimiques

a. Donner la structure électronique du carbone (Z =6) et de l'oxygène (Z =8).
b. Donner la structure électronique du nickel (Z =28), du fer(Z =26)et du chrome (Z =24).
c Donner la structure électronique de Ni^{2+},de Fe^{3+}et de Cr^{3+}.
d. Donner le schéma de Lewis de la molécule CO. Conclure .
e. Donner l'allure du diagramme énergétique des orbitales moléculaire de la molécule CO et sa configuration électronique.
f. Justifier, par un décompte électronique, la stabilité du complexe nickelcarbonyle $Ni(CO)_4$ et donner sa géométrie .

Exercice 3 : Thermodynamique chimique

$Ni(CO)_4$ se forme à température modérée et pression ordinaire par simple passage de monoxyde de carbone gazeux sur des pastilles de nickel. Aucun autre métal n'est susceptible de réagir dans les mêmes conditions.

$$Ni(s) + 4\ CO(g) \leftrightarrows Ni(CO)_4(g) \text{ ou } (l) \qquad (1)$$

a. A l'aide des données thermodynamiques fournies, établir, en fonction de la température absolue T, les expressions de l'enthalpie libre standard de la réaction (1), $\Delta_r G°$, dans les domaines de température 0-43°C et 43-200°C.
b. Tracer le graphe de $\Delta_r G°$ en fonction de T. Quelle est la température d'inversion de l'équilibre ?

c. Quelle est la variance d'un système à l'équilibre constitué de nickel solide, de monoxyde de carbone et de nickel carbonyle gazeux ?
Quel est l'effet sur ce système d'une augmentation de pression à température constante ?

d. Quelle est la variance d'un système à l'équilibre constitué de nickel solide, de monoxyde de carbone et de nickel carbonyle liquide? Quel est l'effet sur ce système d'une augmentation de température à pression constante ?

e. Pour une pression totale de 1 bar, à quelle température sera-t-il judicieux de se placer pour former le nickel carbonyle et le séparer facilement des impuretés, peu volatiles, contenues dans le métal ? On choisira entre 20°C, 40°C, 50°C, 100°C, 160°C ou 200°C.

f. Comment pourrait-on séparer le nickel carbonyle et le monoxyde de carbone ?

g. Quelle température conviendra le mieux pour décomposer le nickel carbonyle à une pression totale de 1 bar ? On choisira entre 20°C, 40°C, 50°C, 100°C, 160°C ou 200°C.

Données numériques :

On supposera les entropies et enthalpies standard de réaction constantes dans le domaine de température considéré.

On donne les enthalpies standard de formation, $\Delta_f H°$ et les entropies molaires standard, s°, à 25 °C :

	Ni (s)	CO (g)	$Ni(CO)_4$ (l)
$\Delta_f H°$ ($kJ.mol^{-1}$)	0	− 111	− 632
s° ($J.K^{-1}.mol^{-1}$)	30	198	320

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR,
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE ET DE LA TECHNOLOGIE

Juillet 2008

CONCOURS NATIONAL
D'ADMISSION A L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE

DISCIPLINE : SCIENCES FONDAMENTALES — **SPECIALITE** : PHYSIQUE-CHIMIE
EPREUVE DE CHIMIE — **DUREE** : 4 Heures — **COEFFICIENT** : 4

Les parties A et B sont à rédiger sur deux copies séparées.

PARTIE A (40 points)

EXERCICE I : *Hybridation, mésomérie, stéréochimie*

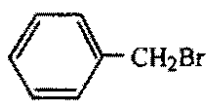
On considère l'aldéhyde suivant: $CH_3 - C \equiv C - CH = O$
4 3 2 1

I-a) Préciser l'état d'hybridation des quatre atomes de carbone de cette molécule. Comment sont disposés les atomes de carbone dans l'espace? Justifier votre réponse.

I-b) S'agit-il d'une molécule conjuguée? Si oui, quel est le nombre d'atomes concernés par la conjugaison et quel est le nombre d'électrons délocalisables?

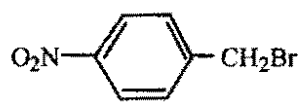
I-c) Écrire la forme limite polaire correspondant à l'éloignement maximal des charges.

I-d) Classer les quatre dérivés bromés ci-dessous par ordre de réactivité croissante vis-à-vis d'un mécanisme S_N1. Expliquer.



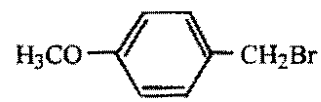
(a)

;



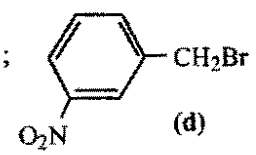
(b)

;



(c)

;



(d)

Soit la molécule d'acide **A** : C_6H_5-CH(CH_2OH)-CO_2H.

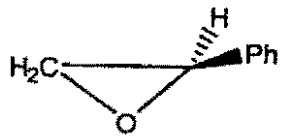
I-e) S'agit-il d'une molécule chirale? Justifier.

I-f) L'acide **A** lévogyre (-) est de configuration S. En indiquant le classement des substituants, représenter dans l'espace la configuration dextrogyre (+) de cet acide.

I-g) Représenter dans l'espace le 1,3-dibromopropa-1,2-diène (HBrC=C=CHBr). Étudier l'activité optique de cette molécule et prévoir le nombre de ses stéréoisomères de configuration.

EXERCICE II : *Réactivité chimique*

II-a) Préciser la configuration du1-phényl-1,2-époxyéthane noté **A** :

A : 

II-b) L'hydrolyse basique ($NaOH/ H_2O$) de **A** ouvre le pont époxydique pour conduire à un diol **B** de pouvoir rotatoire non nul. Détailler le mécanisme de cette réaction et donner la structure de **B**, en précisant sa stéréochimie.

II-c) Expliquer pourquoi l'hydrolyse en milieu acide protonique de **A**, conduit au diol **B** de **pouvoir rotatoire nul.**

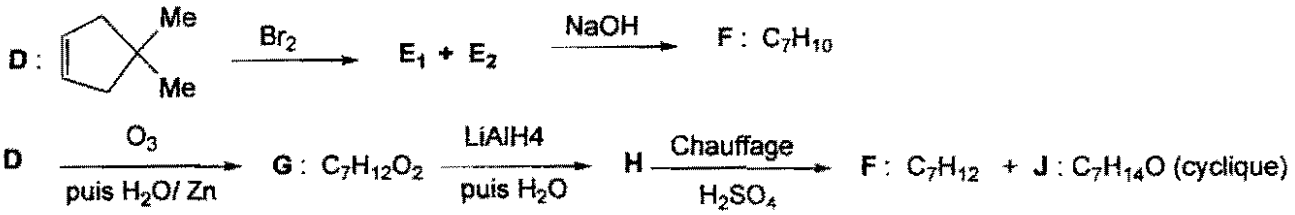
II-d) Que donne le chauffage de l'un des énantiomères de **B** en milieu acide sulfurique ?

II-e) Écrire la structure du produit **C**, obtenu par action de CH_3MgBr suivie d'une hydrolyse sur **A**.

II-f) Proposer une autre méthode de synthèse de **C**, en procédant par une réaction de substitution électrophile sur le benzène utilisant comme réactif un chlorure d'acide.

PROBLEME : ***Mécanismes réactionnels***

A partir de l'hydrocarbure cyclique noté **D**, on effectue la suite des réactions ci-dessous :

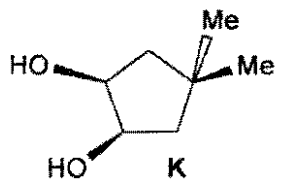


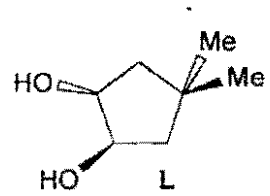
III-a) Nommer l'hydrocarbure **D**.

III-b) Détailler le cours stéréochimique de l'action de Br_2 sur **D** et préciser la relation qui lie E_1 à E_2.

III-c) En explicitant les mécanismes réactionnels, donner les structures des différents produits **F**, **G**, **H**, **I** et **J**.

III-d) A partir de **D**, on se propose de préparer les diols **K** et **L** ci-dessous :





Préciser la relation entre **K** et **L**.

III-e) Proposer une méthode de préparation de chacun de ces deux diols à partir de **D**.

On donne la température d'ébullition à la pression de 1 bar de $Ni(CO)_4$ (l), $T_{éb} = 43°C$, ainsi que l'enthalpie standard de vaporisation (supposée indépendante de la température) $\Delta_{vap}H° = 30\ kJ.mol^{-1}$.
Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.
Masse molaire du nickel : $M_{Ni} = 58{,}69\ g.mol^{-1}$.
Constante d'Avogadro : $N_A = 6{,}022\ 10^{23}$

Exercice 4 : Equilibres d'oxydoréduction en solution

1. L'acide éthanoïque (CH_3COOH) est un oxydant en solution aqueuse dans le couple CH_3COOH/CH_3CH_2OH (acide éthanoïque/éthanol). Écrire la demi-équation d'oxydoréduction correspondante.
2. L'acide éthanoïque est un acide de Brönsted en solution aqueuse. Tracer son diagramme de prédominance acido-basique en fonction du pH.
3. Diagramme potentiel-pH : on souhaite tracer le diagramme potentiel-pH relatif aux trois espèces CH_3COOH, CH_3COO^- et CH_3CH_2OH dans l'eau.
   Convention de frontière à la frontière entre 2 espèces dissoutes, les concentrations des deux espèces sont égales.
   a. Quels sont les deux domaines de pH à considérer ?
   b. Quel est le couple oxydant-réducteur à considérer dans chacun de ces domaines. Donner l'expression de son potentiel d'oxydo-réduction.
   c. En utilisant la convention de frontière, exprimer ces potentiels à la frontière sous la forme $E_f = a + b.pH$. Calculer les valeurs de a et b.
   d. Tracer le diagramme potentiel-pH relatif à ces espèces en le superposant à celui du chrome (document I).
   e. En déduire si l'éthanol peut être oxydé par l'ion dichromate, $Cr_2O_7^{2-}$. Si oui, écrire l'équation-bilan de la réaction mettant en jeu 2 moles d'ion dichromate pour $pH < 4$ et déterminer la valeur de sa constante d'équilibre. Conclure.

Données : À 298 K :
On prendra $(RT/F)\ln(10) = 0{,}06$ V (R constante des gaz parfaits, F constante de Faraday).
Constante d'acidité de l'acide éthanoïque dans l'eau $Ka(CH_3COOH/CH_3COO^-) = 10^{-4,8}$.
Potentiels standard à pH = 0 :
$E°(CH_3COOH/CH_3CH_2OH) = 0{,}037$ V ; $E°(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}) = 1{,}33$ V ; $E°(Fe^{3+}/Fe^{2+}) = 0{,}77$ V.
Masse molaire de l'éthanol : $M(CH_3CH_2OH) = 46\ g.mol^{-1}$.

QUESTION DE COURS

Cinétique chimique

On considère la réaction en solution aqueuse supposée totale et impliquant deux réactifs A et B de concentrations initiales respectives a et b. On supposera que a est différent de b et que la réaction admet un ordre partiel égale à 1 pour chacun des deux réactifs.
Expliciter la concentration de ces réactifs en fonction du temps.